Лекция 14

ПРОСТРАНСТВА $\boldsymbol{H^{-s}}$. СХОДИМОСТЬ В $\boldsymbol{L_2}$ И В $\boldsymbol{H^{-s}}$

В лекции 12 при обсуждении теоремы 12.3 о сходимости простейшего метода конечных элементов в $H^1(0,1)$ было отмечено, что в $L_2(0,1)$ скорость сходимости увеличивается на порядок по сравнению с $H^1(0,1)$. Оказывается, что если конечноэлементное пространство состоит из кусочных многочленов степени выше первой, то можно достичь еще большего увеличения скорости сходимости по сравнению с $H^1(0,1)$, если мерить погрешность решения в нормах еще более слабых, чем $L_2(0,1)$. В этой лекции мы введем указанные нормы и получим соответствующие оценки скорости сходимости.

1. Пространства $\boldsymbol{H^{-s}}$

Пусть (,) — обычные скалярные произведения в $L_2(I) = H^0(I)$. В лекции 1 нами было введено пространство

$$H_0^s(I) = \quad (1)$$
$$= \Big\{ v(x) \in H^s(I) \ \Big| \ v(0) = ... = v^{(s-1)}(0) = v(1) = ... = v^{(s-1)}(1) = 0 \Big\}$$

при $s \in \mathbb{N}$, которое является подпространством гильбертова пространства $H^s(I)$. Скалярное произведение в последнем задается формулой

$$(u, v)_s = \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{d^j u}{dx^j}, \frac{d^j v}{dx^j} \right). \quad (2)$$

Определим на $H_0^s(I)$ линейные непрерывные функционалы, порождаемые функциями $f \in H^0(I)$, полагая

$$l(v) = l_f(v) = (f, v), \qquad v \in H_0^s(I). \tag{3}$$

Нормы введенных функционалов вычисляются обычным образом по формуле:

$$\|l_f\| = \sup_{v \in H_0^s} \frac{|(f, v)|}{\|v\|_s}, \qquad f \in H^0(I). \tag{4}$$

Пополним пространство $H^0(I)$ по норме

$$\|l_f\| =: \|f\|_{-s}, \tag{5}$$

называемой *негативной нормой*. Вновь образованное пространство

$$(H_0^s(I))' = H^{-s}(I)$$

является *сопряженным* (двойственным) к $H_0^s(I)$.

Изучим структуру пространства $H^{-s}(I)$. В силу теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент $u \in H_0^s(I)$, такой что

$$l_f(v) = (u, v)_s, \qquad v \in H_0^s(I). \tag{6}$$

Сравнивая теперь (6) и (3), заключаем, что $u(x)$ есть (обобщенное из $H_0^s(I)$) решение следующей задачи:

$$u(x) \in H_0^s(I): \ (u, v)_s = (f, v) \quad \forall\, v \in H_0^s(I). \tag{7}$$

Определим *функцию Грина* этой задачи, т.е. ядро интегрального оператора, являющегося обратным по отношению к дифференциальному оператору задачи (7). Ею является такая функция $G_{2s}(x; \xi)$ аргумента x и параметра $\xi \in I$, которая служит решением задачи:

$$G_{2s}(x; \xi) \in H_0^s(I): \ (G_{2s}(x; \xi), v(x))_s = v(\xi), \ \xi \in I, \quad \forall\, v \in H_0^s(I).$$

Дифференциальная форма этой задачи такова:

$$L_{2s} G_{2s}(x; \xi) := \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^{2k} G_{2s}(x; \xi)}{dx^{2k}} = \delta(x - \xi), \quad x \in I, \tag{8}$$

$$G_{2s}(0; \xi) = \dots = \frac{d^{s-1} G_{2s}(0; \xi)}{dx^{s-1}} = G_{2s}(1; \xi) = \dots = \frac{d^{s-1} G_{2s}(1; \xi)}{dx^{s-1}} = 0.$$

В силу симметрии билинейной формы $a(u,v) \equiv (u,v)_s$ задача (8) является самосопряженной, а ее решение — функция Грина — есть симметричная функция по отношению к x и ξ, т.е. $G_{2s}(x;\xi) = G_{2s}(\xi;x)$. Решение задачи (7) при помощи функции Грина выписывается следующим образом:

$$u(x) = \big(G_{2s}(x;\xi), f(\xi)\big). \tag{9}$$

Итак, мы установили взаимно-однозначное соответствие между $H_0^s(I)$ и $H^{-s}(I)$, осуществляемое при помощи оператора L_{2s} из (8) и соотношения (9).

Пусть $v(x) \in H_0^s(I)$. Ей соответствует $g(x) \in H^{-s}(I)$ такая, что

$$v(x) = \big(G_{2s}(x;\xi), g(\xi)\big).$$

Подставляя это представление $v(x)$ в (3), получим

$$(f,v) = \big(f, (G_{2s}, g)\big) = \big(g, (G_{2s}, f)\big) = (f,g)_{-s}.$$

Мы нашли вид скалярного произведения в гильбертовом пространстве $H^{-s}(I)$:

$$(f,g)_{-s} = \int_0^1 \int_0^1 G_{2s}(x;\xi) f(x) g(\xi)\, dx d\xi$$

и, тем самым, получили конструктивный способ вычисления нормы в H^{-s}, отличный от (4):

$$\|f\|_{-s}^2 = \int_0^1 \int_0^1 G_{2s}(x;\xi) f(x) f(\xi)\, dx d\xi. \tag{10}$$

Укажем еще один способ вычисления нормы в $H^{-s}(I)$ — в терминах коэффициентов Фурье. Пусть $\mu_m(x)$ — собственные функции, а $\lambda_m^{(2s)}$ — собственные значения следующей задачи:

$$L_{2s}\mu_m(x) = \lambda_m^{(2s)}\mu_m(x), \qquad x \in I,$$
$$\mu_m(0) = \ldots = \mu_m^{(s-1)}(0) = \mu_m(1) = \ldots = \mu_m^{(s-1)}(1) = 0.$$

В силу самосопряженности и положительной определенности оператора задачи все собственные значения действительны и положительны, а собственные функции можно считать ортонормированными. Легко проверить, что

$$\delta(x-\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(x)\mu_m(\xi)$$

и поэтому

$$G_{2s}(x;\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m(x)\mu_m(\xi)}{\lambda_m^{(2s)}}$$

(формула Мерсера). Отсюда и из (10) находим, что

$$\|f\|_{-s}^2=\sum_{m=1}^{\infty}f_m^2/\lambda_m^{(2s)}, \tag{11}$$

где f_m — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ при разложении по $\mu_m(x)$. При $s=1$ имеем $\lambda_m^{(2)}=\pi^2m^2+1$. В общем же случае известно, что

$$c\,m^{2s}\leqslant\lambda_m^{(2s)}\leqslant\frac{1}{c}m^{2s},$$

где c зависит только от s, и поэтому

$$c\sum_{m=1}^{\infty}f_m^2m^{-2s}\leqslant\|f\|_{-s}^2\leqslant\frac{1}{c}\sum_{m=1}^{\infty}f_m^2m^{-2s}.$$

Формула для нормы, аналогичная (11), имеет место и в $H_0^s(I)$. Очевидно, что

$$\|v\|_s^2=\sum_{m=1}^{\infty}v_m^2\lambda_m^{(2s)}. \tag{12}$$

В качестве последнего штриха к портрету пространства $H^{-s}(I)$ вычислим $\|f'\|_{-1}$, точнее, вычислим эквивалентную ей величину. В силу леммы 11.4 норма и полунорма в $H_0^1(I)$ эквивалентны. (Как, впрочем, и в любом $H_0^s(I)$). Поэтому в $H^{-1}(I)$ можно определить эквивалентную норму путем использования в (4) вместо нормы в $H^1(I)$ соответствующей полунормы. Пусть

$$\widetilde{\|l_f\|}=\sup_{v\in H_0^1}\frac{|(f,v)|}{|v|_1}.$$

Тогда вместо (6) будем иметь

$$l_f(v)=(u',v'),$$

а функция Грина из (10) примет вид

$$\widetilde{G}_2(x;\xi)=\begin{cases}x(1-\xi), & x\leqslant\xi,\\ (1-x)\xi, & x\geqslant\xi.\end{cases} \tag{13}$$

Поэтому
$$\widetilde{\|f\|}^2_{-1} = \int_0^1 \int_0^1 \widetilde{G}_2(x;\xi) f(x) f(\xi)\, dx d\xi,$$
а
$$\widetilde{\|f'\|}^2_{-1} = \int_0^1 \int_0^1 \widetilde{G}_2(x;\xi) f'(x) f'(\xi)\, dx d\xi.$$
Преобразуем правую часть интегрированием по частям. Первое интегрирование проходит безболезненно, ибо
$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{G}_2(x;\xi) = \begin{cases} 1-\xi, & x<\xi \\ -\xi, & x>\xi \end{cases} = \chi(\xi - x) - \xi,$$
где $\chi(\xi)$ — функция Хевисайда (см. 1.14) — всего лишь разрывна при $x=\xi$ и, следовательно,
$$\widetilde{\|f'\|}^2_{-1} = -\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f'(\xi)[\chi(\xi - x) - \xi] d\xi.$$
Второе интегрирование по частям (по ξ) нужно проводить либо отдельно по $(0,x)$ и $(x,1)$, либо с использованием обобщенной производной функции $\chi(\xi - x)$, равной $\delta(\xi - x)$. В любом случае будем иметь
$$\begin{aligned} &\widetilde{\|f'\|}^2_{-1} = \\ &= -\int_0^1 f(x)dx \left\{ f(\xi)\Big[\chi(\xi - x) - \xi\Big]_{\xi=0}^{\xi=1} - f(x) + \int_0^1 f(\xi)d\xi \right\} = \\ &= \|f\|_0^2 - (f,1)^2. \end{aligned}$$

Особую элегантность это соотношение приобретает в том случае, когда $f(x)$ ортогональна единице. Тогда просто
$$\widetilde{\|f'\|}_{-1} = \|f\|_0.$$

2. Априорные оценки решения

Для исследования скорости сходимости метода конечных элементов в L_2 и в H^{-s} нам потребуются оценки решения задачи, которую мы собираемся решить этим методом, в различных нормах. Будем рассматривать ту же смешанную задачу, что и в лекциях 11, 12 при исследовании сходимости в H^1.

Теорема 1 (об априорных оценках)**.** *Если выполнены условия* (11.16) *и решение задачи* (11.4), (11.14), (11.15) *существует, то для него справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_1 \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{c_0}\big(\|f\|_0 + |g|\big). \tag{14}$$

Если к тому же выполнены условия (11.17) *и*

$$|p'(x)| \leqslant c_3, \tag{15}$$

то

$$|u|_2 \leqslant c_4\big(\|f\|_0 + |g|\big), \tag{16}$$

где

$$c_4 = \frac{1}{c_0}\left[\frac{2\sqrt{2}(c_2+c_3)}{c_0} + 1\right].$$

Доказательство. Пусть решение задачи (11.4), (11.14), (11.15) существует. Полагая в (11.4) $v = u$ и принимая во внимание лемму 11.5, получим

$$\frac{c_0}{2}\|u\|_1^2 \leqslant a(u,u) = l(u) = \int_0^1 fu\,dx + gu(1).$$

К интегралу в правой части применим неравенство Коши-Буняковского, а для оценки $u(1)$ воспользуемся леммой 11.1. В результате найдем, что

$$\frac{c_0}{2}\|u\|_1^2 \leqslant \|f\|_0\|u\|_0 + \sqrt{2}|g|\|u\|_1 \leqslant \sqrt{2}\big(\|f\|_0 + |g|\big)\|u\|_1,$$

откуда и следует (14).

Для доказательства (16) воспользуемся дифференциальной формулировкой задачи, именно уравнением (11.12). Из этого уравнения имеем

$$u'' = \frac{1}{p(x)}[-p'u' + qu - f],$$

а с учетом (11.16), (11.17) и (15) находим, что

$$|u''| \leqslant \frac{1}{c_0}(c_3|u'| + c_2|u| + |f|).$$

Вычисляя L_2-норму левой и правой частей и используя неравенство треугольника, будем иметь

$$\|u''\|_0 \leqslant \frac{1}{c_0}(c_3\|u'\|_0 + c_2\|u\|_0 + \|f\|_0) \leqslant \frac{c_2 + c_3}{c_0}\|u\|_1 + \frac{1}{c_0}\|f\|_0.$$

Но $\|u\|_1$ уже оценена, так что, подставляя сюда эту оценку (14), приходим к (16). □

Теорема 2. *Если коэффициенты и правая часть задачи* (11.12), (11.13) *таковы, что $u \in H^m(I)$, $m = 3, 4, \dots$, то наряду с* (14) *и* (16) *справедливы оценки*

$$|u|_m \leqslant c(m)(\|f\|_{m-2} + |g|), \tag{17}$$

где $c(m)$ — положительные постоянные, не зависящие ни от u, ни от f, ни от g.

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем.

3. Сходимость в L_2

Как уже отмечалось в лекции 12, из теоремы 12.3 (теоремы 12.5) о сходимости конечноэлементного решения из S_1^h (S_k^h) в норме $H^1(I)$ со скоростью $O(h)$ $\big(O(h^k)\big)$ следует его сходимость и в $L_2(I)$ с той же скоростью. Однако в силу теорем 12.2 и 12.4 погрешность интерполяции в $L_2(I)$ имеет на единицу больший порядок малости по h, чем в $H^1(I)$. Докажем, что аналогичным свойством обладает и конечноэлементное решение.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (11.16) *и решение $u(x)$ задачи* (11.12), (11.13) *принадлежит $H^{k+1}(I)$, $k \in \mathbb{N}$, то решение задачи* (11.7) *с $a(u,v)$ и $l(v)$ из* (11.14) *и $H^h = \widetilde{S}_k^h$ из* (12.16), (12.17) *(приближенное решение) сходится к решению задачи* (11.12), (11.13) *в смысле нормы пространства $L_2(I)$ со скоростью $O(h^{k+1})$, т.е.*

$$\|u - u^h\|_0 \leqslant ch^{k+1}|u|_{k+1},$$

где $c = \mathrm{const} > 0$ не зависит ни от h, ни от u.

Доказательство. Введем уточняющее обозначение для линейной формы $l(v)$. Пусть (ср. с (3))

$$l_\varphi(v) := \int_0^1 \varphi(x)v(x)\,dx. \tag{18}$$

Определим вспомогательную функцию $w(x)$ как решение задачи

$$w(x) \in \widetilde{H}^1(I): \ a(v,w) = l_\varphi(v) \qquad \forall v \in \widetilde{H}^1(I) \tag{19}$$

и положим здесь $v = u - u^h$. Тогда с учетом теоремы 11.1 и неравенства Шварца

$$l_\varphi(u-u^h) = a(u-u^h, w) = a(u-u^h, w-i_{h,1}w) \leqslant \| u-u^h \|_a \| w-i_{h,1}w \|_a .$$

Для оценки правой части этого неравенства применим сначала лемму 11.5, а затем теорему 12.4 об аппроксимации и теорему 12.5 о сходимости в $H^1(I)$. Будем иметь

$$l_\varphi(u-u^h) \leqslant c\,\|u-u^h\|_1\|w-i_{h,1}w\|_1 \leqslant c\,h^{k+1}|u|_{k+1}|w|_2.$$

Оценим теперь $|w|_2$ при помощи теоремы 1 и положим $\varphi \equiv u - u^h$. В результате получим

$$l_{u-u^h}(u-u^h) = \int_0^1 (u-u^h)^2\,dx = \|u-u^h\|_0^2 \leqslant c\,h^{k+1}|u|_{k+1}\|u-u^h\|_0,$$

откуда после сокращения обеих частей неравенства на $\|u-u^h\|_0$ и следует утверждение теоремы. □

4. Сходимость в H^{-s}

Имеет место

Теорема 4. *Если выполнены условия* (11.16) *и решение* $u(x)$ *задачи* (11.12), (11.13) *принадлежит* $H^{k+1}(I)$, $k \in \mathbb{N}$, *то решение задачи* (11.7) *с* $a(u,v)$ *и* $l(v)$ *из* (11.14) *и* $H^h = \widetilde{S}_k^h$ *из* (12.16), (12.17) *(приближенное решение) сходится к решению задачи* (11.12), (11.13) *в смысле нормы пространства* $H^{-s}(I)$, $s = 1, , \ldots k-1$ *со скоростью* $O(h^{k+s+1})$. *Именно,*

$$\|u-u^h\|_{-s} \leqslant c\,h^{k+s+1}|u|_{k+1}, \qquad s = 1, 2, ..., k-1, \tag{20}$$

где $c = \mathrm{const} > 0$ *не зависит ни от* h, *ни от* u.

Доказательство. Пусть $w(x)$ есть решение задачи (19). Как и при доказательстве теоремы 3 найдем, что

$$l_\varphi(u-u^h) \leqslant c\,\|u-u^h\|_1\|w-i_{h,s+1}w\|_1 \leqslant c\,h^{k+s+1}|u|_{k+1}|w|_{s+2}.$$

Далее

$$\begin{aligned}\|u-u^h\|_{-s} &= \sup_{\varphi\in H_0^s}\frac{|(u-u^h,\varphi)|}{\|\varphi\|_s} = \\ &= \sup_{\varphi\in H_0^s}\frac{l_\varphi(u-u^h)}{\|\varphi\|_s} \leqslant \\ &\leqslant c\,h^{k+s+1}\sup_{\varphi\in H_0^s}\frac{|u|_{k+1}|w|_{s+2}}{\|\varphi\|_s}.\end{aligned} \tag{21}$$

Но в силу теоремы 2

$$|w|_{s+2} \leqslant c\,(s+2)\|\varphi\|_s,$$

что вместе с (21) приводит к искомой оценке (20). □

Замечание 1. Разумеется, теорема 3 является частным случаем теоремы 4, ибо

$$\|f\|_0 = \sup_{v\in L_2(I)}\frac{(f,v)}{\|v\|_0},$$

т.е. пространство $L_2(I)$ сопряжено само к себе в смысле скалярного произведения (,).

5. Упражнения

1. Доказать, что $\|\widetilde{f'}\|_{-1} = \sum_{m=1}^\infty \bar f_m^2$, где $\bar f_m = (f,\overline{\mu}_m)$, а $\overline{\mu}_m = \sqrt{2}\cos\pi m x$, $m\in\mathbb{N}$, $m=1,2,\ldots$.

2. Доказать, что $\|\widetilde{\sin k\pi x}\|_{-1} = 1/(\sqrt{2}k\pi)$.

3. Доказать, что $\|-f''+f\|_{-2} = \|f\|_0$.

4. Доказать, что $\|u-u^h\|_{-s} \leqslant ch^{l+s+1}|u|_{l+1}$, где $l=1,\ldots,k$, а $s=0,\ldots,k-1$.

5. Выяснить, где при доказательстве теоремы 3 использовано условие (11.16).

6. Выяснить, где при доказательстве теоремы 4 использовано условие $s \leqslant k-1$. Какова величина $\|u-u^h\|_{-k}$?

Лекция 15

СУПЕРСХОДИМОСТЬ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ

Установленная в предыдущей лекции оценка скорости сходимости МКЭ в смысле *негативных норм* $H^{-s}(I)$, казалось бы, не должна представлять сколь-нибудь существенный практический интерес: обычно интересуются точностью метода в смысле норм C, H^1 или, на худой конец, в L_2. Однако утверждение теоремы 14.4 содержит весьма значительную информацию о разности между u и u^h. Можно показать, что функция Грина $G_{2s}(x;\xi)$, фигурирующая в определении нормы пространства $H^{-s}(I)$ формулой (14.10), неотрицательна и, следовательно, бо́льшая по порядку малость $\|u-u^h\|_{-s}$ по сравнению с $\|u-u^h\|_0$ должна свидетельствовать о том, что на $e^{(i)}$ существуют нули функции $u-u^h$, где она меняет знак.[*)] Если бы мы знали эти нули, то мы знали бы не приближенное, а точное решение в этих точках. Разумеется, положение этих нулей зависит не только от метода решения, но и от самой функции $u(x)$, и найти их, за отдельными исключениями, не представляется возможным. Однако можно пытаться искать точки из малых окрестностей этих нулей, которые уже не зависят от u (но зависят от метода) и в которых разность между u и u^h является малой величиной более высокого порядка, чем, например, $\|u-u^h\|_1$. Такие точки называются *точками суперсходимости* МКЭ.

[*)]Например, функциональная последовательность $\sin k\pi x$, $k \in \mathbb{N}$, всего лишь ограничена в $C(I)$ и даже в $L_2(I)$. Однако, как следует из задачи 14.2, $\|\sin k\pi x\|_{-1} = \sqrt{2}/(k\pi)$, и в смысле H^{-1} эта последовательность является сходящейся к нулю.

1. Суперсходимость в узлах

Напомним формулировку задачи, исследованием конечноэлементного решения которой мы занимаемся. Найти решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x), \quad x\in I,\\ &u(0)=0, \quad p(1)u'(1)+\varkappa u(1)=g, \end{aligned} \tag{1}$$

коэффициенты которой подчинены условиям

$$p(x)\geqslant c_0>0, \quad q(x)\geqslant 0, \quad \varkappa\geqslant 0. \tag{2}$$

Мы изучаем конечноэлементное решение этой задачи, т.е. функцию

$$u^h(x)\in\tilde{S}^h_k: \quad a(u^h,v^h)=l(v^h) \quad \forall v^h\in\tilde{S}^h_k, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} &a(u,v)=\int_0^1\left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+quv\right)dx+\varkappa u(1)v(1),\\ &l(v)=\int_0^1 fv dx+gv(1), \end{aligned} \tag{4}$$

а $\tilde{S}^h_k$ определяется (12.16), (12.17) и есть совокупность кусочно полиномиальных степени k непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x=0$.

Имеет место

Теорема 1. *Если выполнены условия* (2) *и решение* $u(x)$ *задачи* (1) *принадлежит* $H^{k+1}(I)$, *то узлы* x_i *конечноэлементной сетки, служащие концами элементов* $e^{(i)}=[x_{i-1},x_i]$, *являются точками суперсходимости конечноэлементного решения* u^h *из* (3). *В этих точках справедлива оценка*

$$\max_i|u(x_i)-u^h(x_i)|\leqslant c\,h^{2k}|u|_{k+1}, \tag{5}$$

где $c=\mathrm{const}>0$ *не зависит ни от* u, *ни от* h.

Доказательство. Пусть $w(x)$ есть решение вариационной задачи (14.19). Положим правую часть этой задачи $\varphi(x) = \delta(x - x_i)$. При таком выборе правой части задача (14.19) определяет функцию точечного источника (*функцию Грина*), которую обозначим через $G(x; x_i)$.

$$a\,(v(x), G(x; x_i)) = v(x_i). \tag{6}$$

Полагая в (6) $v(x) = u(x) - u^h(x)$ и используя теорему 11.1 (об ортогональной проекции), после применения неравенства Шварца и леммы 11.5 будем иметь

$$\begin{gathered} |u(x_i) - u^h(x_i)| = \\ = a\left(u - u^h, G(x; x_i) - i_{h,k}G(x; x_i)\right) \leqslant \\ \leqslant c_4\,\|u - u^h\|_1\,\|G(x; x_i) - i_{h,k}G(x; x_i)\|_1. \end{gathered} \tag{7}$$

Оценка первого сомножителя известна из теоремы 12.5, так что осталось оценить второй сомножитель. Поскольку $G(x; x_i)\overline{\in} H^{k+1}(I)$, то для оценки этого сомножителя применить теорему 12.4 непосредственно нельзя.

Покажем, что требуемую гладкость $G(x; x_i)$ имеет на $(0, x_i)$ и на $(x_i, 1)$. Для этого установим сначала оценку $G(x; x_i)$ в $H^1(I)$. Полагая в (6) $v(x) = G(x; x_i)$ и применяя леммы 11.5 и 11.1, находим, что

$$\begin{gathered} \frac{c_0}{2}\|G(x; x_i)\|_1^2 \leqslant \\ \leqslant a\,(G(x; x_i), G(x; x_i)) = G(x_i; x_i) \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2}\|G(x; x_i)\|_1, \end{gathered}$$

т.е.

$$\|G(x; x_i)\|_1 \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{c_0}. \tag{8}$$

Далее, по определению функции точечного источника, сосредоточенного в точке $x = x_i$

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x; x_i)}{dx}\right) + q(x)G(x; x_i) = 0, \quad 0 < x < x_i,\ x_i < x < 1.$$

Отсюда с учетом (8), как и при доказательстве теорем 14.1 и 14.2, находим, что

$$|G(x;x_i)|^2_{H^{k+1}(0,x_i)} + |G(x;x_i)|^2_{H^{k+1}(x_i,1)} \leqslant c.$$

Итак, из теоремы 12.4 с учетом вышеприведенного неравенства имеем оценку

$$\begin{aligned}&\|G(x;x_i) - i_{h,k}G(x;x_i)\|_1^2 = \\ &= \|G(x;x_i) - i_{h,k}G(x;x_i)\|^2_{H^1(0,x_i)} + \\ &+ \|G(x;x_i) - i_{h,k}G(x;x_i)\|^2_{H^1(x_i,1)} \leqslant c\,h^{2k}.\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку и оценку из теоремы 12.5 в (7), приходим к (5). □

Замечание 1. Легко проверить, что если коэффициенты уравнения (1) $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, то

$$G(x;x_i) = i_{h,k}G(x;x_i).$$

В этом случае из (7) следует, что $u(x_i) - u^h(x_i) = 0$, т.е. в узлах, являющихся концами элементов, точное и приближенное решения совпадают.

2. Сходимость в C

Мы уже достаточно подробно изучили сходимость метода конечных элементов в различных нормах. Однако пока открытым остается вопрос о скорости его поточечной сходимости. Из теоремы 12.5 и леммы 11.1, правда, вытекает оценка *поточечной сходимости* $O(h^k)$, но эта оценка не является точной. На самом деле, имеет место

Теорема 2. *Если решение* $u(x)$ *задачи* (1) *принадлежит* $C^{k+1}(\bar{I})$, *а* u^h *— решение задачи* (3), (4), *то при выполнении условий* (2), (11.17) *справедлива оценка*

$$\|u(x) - u^h(x)\|_{C(\bar{I})} \leqslant c\,h^{k+1}\|u^{(k+1)}\|_{C(\bar{I})}, \tag{9}$$

где $c = \mathrm{const} > 0$ *не зависит ни от* u, *ни от* h.

Доказательство. Сначала зафиксируем тот факт, что $u^h(x)$ есть ортогональная в смысле энергетического скалярного произведения $a(\, , \,)$ проекция $u(x)$ на $\tilde{S}^h_k$, т.е.

$$a(u - u^h, v^h) = 0 \quad \forall v^h \in \tilde{S}^h_k. \tag{10}$$

Затем введем билинейную форму

$$\tilde{a}(u,v)=\int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)dx+\varkappa u(0)v(0) \tag{11}$$

и определим проекцию $u(x)$ на $\tilde{S}_k^h$, но теперь уже в смысле $\tilde{a}(\ ,\ )$

$$\tilde{u}^h\in\tilde{S}_k^h \quad : \quad \tilde{a}(u-\tilde{u}^h,v^h)=0 \quad \forall v^h\in\tilde{S}_k^h. \tag{12}$$

Пусть, кроме того,

$$\tilde{a}^{(i)}(u,v)=\int\limits_{e^{(i)}} p(x)u'(x)v'(x)dx, \quad i=1,\dots,N, \tag{13}$$

$$P_k\big(e^{(i)};w\big)=\Big\{v(x)\in P_k\big(e^{(i)}\big)\ \Big|\ v(x)-w(x)\in H_0^1\big(e^{(i)}\big)\Big\}, \tag{14}$$

а $\tilde{u}^{h(i)}$ — локальная проекция $u(x)$ на элементе $e^{(i)}$

$$\tilde{u}^{h(i)}\in P_k\big(e^{(i)};u\big)\ : \quad \tilde{a}^{(i)}(u-\tilde{u}^{h(i)},v)=0 \quad \forall v\in P_k\big(e^{(i)};0\big). \tag{15}$$

Введенные функции $\tilde{u}^h$ и $\tilde{u}^{h(i)}$ потребуются нам при оценке $|u-u^h|_C$.

Перейдем к получению оценки (9). Используя неравенство треугольника, находим, что

$$\begin{gathered}
\|u-u^h\|_C=\|u-\tilde{u}^h+\tilde{u}^h-u^h\|_C\leqslant\\
\leqslant\|u-\tilde{u}^h\|_C+\|\tilde{u}^h-u^h\|_C=\\
=\|u^h-\tilde{u}^h\|_C+\max_i\|u-\tilde{u}^h\|_{C(e^{(i)})}=\\
=\|u^h-\tilde{u}^h\|_C+\max_i\|u-\tilde{u}^{h(i)}+\tilde{u}^{h(i)}-\tilde{u}^h\|_{C(e^{(i)})}\leqslant\\
\leqslant\|u^h-\tilde{u}^h\|_C+\max_i\|u-\tilde{u}^{h(i)}\|_{C(e^{(i)})}+\max_i\|\tilde{u}^h-\tilde{u}^{h(i)}\|_{C(e^{(i)})}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Займемся оценкой слагаемых из правой части (16). Начнем с первого слагаемого. В силу (10) с учетом (4) и (11)

$$0=a(u-u^h,v^h)=\tilde{a}(u-u^h,v^h)+(q(u-u^h),v^h).$$

Вычитая из правой части этого соотношения (12), найдем, что

$$\tilde{a}(u^h-\tilde{u}^h,v^h)=(q(u-u^h),v^h),$$

а полагая здесь $v^h = u^h - \tilde{u}^h$, будем иметь

$$\|u^h - \tilde{u}^h\|_{\tilde{a}}^2 = (q(u - u^h), u^h - \tilde{u}^h).$$

Оценим левую часть снизу сначала при помощи леммы 11.5, а затем при помощи леммы 11.1. Для оценки правой части примем во внимание (11.7) и воспользуемся неравенством Коши-Буняковского. Замечая теперь, что $\|v\|_0 \leqslant \|v\|_C$ и используя теорему 14.3, находим, что

$$\begin{aligned}
&\frac{c_0}{4}\|u^h - \tilde{u}^h\|_C^2 \leqslant \frac{c_0}{2}\|u^h - \tilde{u}^h\|_1^2 \leqslant \\
&\leqslant \|u^h - \tilde{u}^h\|_{\tilde{a}}^2 \leqslant \\
&\leqslant c_2\|u - u^h\|_0\|u^h - \tilde{u}^h\|_0 \leqslant \\
&\leqslant c_2 c\, h^{k+1}|u|_{k+1}\|u^h - \tilde{u}^h\|_C \leqslant \\
&\leqslant c_2 c\, h^{k+1}\|u^{(k+1)}\|_C\|u^h - \tilde{u}^h\|_C.
\end{aligned}$$

После сокращения обеих частей этого неравенства на $\|u^h - \tilde{u}^h\|_C$ приходим к искомой оценке

$$\|u^h - \tilde{u}^h\|_C \leqslant c\, h^{k+1}\|u^{(k+1)}\|_C. \tag{17}$$

Перейдем к оценке второго слагаемого правой части (16). Пусть $\tilde{G}^{(i)}(x;\xi)$ — функция Грина дифференциального оператора, порождаемого билинейной формой (13) и граничными условиями первого рода. Определяющее ее вариационное уравнение имеет вид

$$v(x) = \tilde{a}^{(i)}\big(\tilde{G}^{(i)}(x;\xi), v(\xi)\big) \quad \forall v(\xi) \in H_0^1(e^{(i)}).$$

Полагая здесь $v(x) = u - \tilde{u}^{h(i)}$ и оценивая правую часть при помощи неравенства Шварца, с учетом леммы 11.5 будем иметь

$$\big|u(x) - \tilde{u}^{h(i)}\big| \leqslant c_4\|\tilde{G}^{(i)}(x;\xi)\|_{\tilde{a}^{(i)}}\|u - \tilde{u}^{h(i)}\|_{H_0^1(\overset{\circ}{e}^{(i)})}.$$

Для оценки $\|u - \tilde{u}^{h(i)}\|_{H_0^1(\overset{\circ}{\to} e^{(i)})}$ воспользуемся теоремой 12.5 и примем во внимание, что $|u|_{H^{k+1}(\overset{\circ}{e}^{(i)})} \leqslant \sqrt{h}\|u^{(k+1)}\|_{C(e^{(i)})}$. В результате получим

$$|u(x) - \tilde{u}^{h(i)}(x)| \leqslant c_4 c\, h^{k+1/2}\|\tilde{G}^{(i)}(x;\xi)\|_{\tilde{a}^{(i)}}\|u^{(k+1)}\|_{C(e^{(i)})}. \tag{18}$$

Оценим теперь функцию Грина. Легко видеть, что (ср. с (13.5))

$$\tilde G^{(i)}(x;\xi)=\begin{cases}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\dfrac{dt}{p(t)}\int\limits_{\xi}^{x_i}\dfrac{dt}{p(t)}\Big/\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\dfrac{dt}{p(t)}, & x\leqslant\xi,\\ \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi}\dfrac{dt}{p(t)}\int\limits_{x}^{x_i}\dfrac{dt}{p(t)}\Big/\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\dfrac{dt}{p(t)}, & x\geqslant\xi\end{cases}$$

и, следовательно, $\|\tilde G^{(i)}(x;\xi)\|_{\tilde a^{(i)}}\leqslant\sqrt{h/c_0}$. Подставляя это неравенство в (18), получим искомую оценку

$$\|u-\tilde u^{h(i)}\|_{C(e^{(i)})}\leqslant c\,h^{k+1}\|u^{(k+1)}\|_{C(e^{(i)})}. \tag{19}$$

Осталось оценить последнее слагаемое правой части (16). Для этого продолжим функцию $v(x)\in P_k(e^{(i)};0)$ из (14) на I нулем и результат обозначим через $v_I(x)$. Очевидно, что $v_I(x)\in S_k^h$. Отсюда с учетом (12) находим, что

$$0=\tilde a(u-\tilde u^h,v_I)=a^{(i)}(u-\tilde u^h,v)\quad\forall v\in P_k(e^{(i)};0).$$

Вычитая правую часть этого соотношения из (15), будем иметь

$$\tilde a^{(i)}(\tilde u^h-\tilde u^{h(i)},v)=0\quad\forall v\in P_k(e^{(i)};0). \tag{20}$$

Так как по построению (см. (12), (15)) функция $z(x)=\tilde u^h-\tilde u^{h(i)}\in P_k(e^{(i)};\tilde u^h-u)$, то в силу (20) она является решением вариационной задачи

$$z\in P_k(e^{(i)};\tilde u^h-u)\ :\quad \tilde a^{(i)}(z,v)=0\quad\forall v\in P_k(e^{(i)};0),$$

а в силу теоремы 2.1 и задачи минимизации

$$\tilde a^{(i)}(z,z)=\inf_{v\in P_k(e^{(i)};\tilde u^h-u)}\tilde a^{(i)}(v,v).$$

Отсюда, в частности, следует, что $\tilde a^{(i)}(z,z)\leqslant\tilde a^{(i)}(\varphi,\varphi)$, где $\varphi(x)$ — принадлежащая $P_k(e^{(i)};\tilde u^h-u)$ линейная функция, и с учетом (11.16), (11.17) имеем

$$|z|^2_{H^1(e^{(i)})}\leqslant\frac{1}{c_0}\tilde a^{(i)}(z,z)\leqslant\frac{c_1}{c_0}\int\limits_{e^{(i)}}(\varphi')^2dx=$$
$$=\frac{c_1}{c_0}\left[z(x_{i-1})-z(x_i)\right]^2/h.$$

Сделаем в левой части замену переменной $(x - x_{i-1})/h = t$ (см. (12.12) и далее), а правую часть оценим при помощи неравенства Коши

$$\int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\hat{z}^{(i)}(t)\right]^2 dt \leqslant 2\frac{c_1}{c_0}\left[z^2(x_{i-1}) + z^2(x_i)\right].$$

Добавим к обеим частям этого неравенства $(\hat{z}^{(i)}(0))^2 = z^2(x_{i-1})$ и воспользуемся леммой 13.7, в силу которой $(\hat{z}^{(i)}(0))^2 + |\hat{z}^{(i)}|_1^2 \sim \|\hat{z}^{(i)}\|_1^2$, а вновь полученную левую часть оценим снизу при помощи леммы 11.1. В результате получим

$$\|\hat{z}^{(i)}\|^2_{C(\bar{I})} = \|z\|^2_{C(e^{(i)})} \leqslant c\,\left[z^2(x_{i-1}) + z^2(x_i)\right]. \tag{21}$$

Нам осталось вспомнить, что $z(x_i) = (\tilde{u}^h - u)(x_i)$ и воспользоваться теоремой 1, в силу которой $|(\tilde{u}^h - u)(x_i)| \leqslant ch^{2k}|u|_{k+1}$. Подставляя эти оценки в правую часть (21) и извлекая из обеих частей неравенства квадратные корни, будем иметь оценку

$$\|z\|_{C(e^{(i)})} \leqslant c\,h^{2k}|u|_{k+1} \leqslant c\,h^{2k}\|u^{(k+1)}\|_C, \tag{22}$$

которая является даже более сильной, чем мы хотели. Искомая оценка (9) следует из (17), (19), (22) и (16). □

3. Пример

В завершение построим конечноэлементное решение следующей задачи

$$u'' = 6x, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \tag{23}$$

и изучим структуру его погрешности. Будем искать решение из пространства S_2^h. Пусть, как обычно, $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$, а дополнительные узлы обозначим через $x_{i-1/2}$, $i = 1, \ldots, N$. В силу замечания конечноэлементное решение задачи (23) в узлах x_i совпадает с точным решением этой задачи, имеющим вид $u(x) = x^3$. Поэтому достаточно найти только $u^h(x_{i-1/2})$. Матрица функций формы квадратичного элемента имеет вид

$$\Phi^{(i)} = \frac{2}{h^2}\left[(x - x_{i-1/2})(x - x_i),\, 2(x - x_{i-1})(x_i - x),\, (x - x_{i-1/2})(x - x_{i-1})\right],$$

где $h = x_i - x_{i-1}$, а матрица жесткости есть

$$K^{(i)} = \frac{1}{3h}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Правая часть интересующего нас уравнения для определения $u^h(x_{i-1/2})$ задается второй компонентой вектора нагрузки $F^{(i)}$ и есть

$$\begin{aligned} F^{(i)} &= -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} 6x\,\frac{4}{h^2}\,(x - x_{i-1})(x_i - x)dx = \\ &= -24h\int_0^1 (ht + x_{i-1})t(1-t)dt = \\ &= -4h\,(x_i - h/2). \end{aligned}$$

Искомое уравнение имеет вид

$$-\frac{8}{3h}u^h(x_{i-1}) + \frac{16}{3h}u^h(x_{i-1/2}) - \frac{8}{3h}u^h(x_{i+1}) = -4h\,(x_i - h/2).$$

Поскольку $u^h(x_i) = u(x_i) = x_i^3$, то отсюда находим, что

$$u^h(x_i - h/2) = (x_{i-1/2})^3,$$

т.е. значения приближенного решения и в узлах $x_{i-1/2}$ совпадают со значениями точного решения. Тем самым,

$$\begin{aligned} u^h(x) = \frac{2}{h^2}\big[&(x - x_{i-1/2})(x - x_i)x_{i-1}^3 + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i-1})x_i^3 + \\ &+ 2(x - x_{i-1})(x_i - x)x_{i-1/2}^3\big], \quad x \in e^{(i)}, \end{aligned}$$

или, вводя локальную переменную $t = (x - x_{i-1})/h$,

$$\begin{aligned} u^h = &\left(3x_i h^2 - \frac{3h^3}{2}\right)t^2 + \\ &+ \left(3x_i^2 h - 6x_i h^2 + \frac{5h^3}{2}\right)t + \\ &+ \left(x_i^3 - 3x_i^2 h + 3x_i h^2 - h^3\right). \end{aligned}$$

Точное же решение в локальных переменных имеет вид

$$u = h^3t^3 + 3h^2x_{i-1}t^2 + 3hx_{i-1}^2t + x_{i-1}^3$$

и потому

$$u - u^h = h^3t(t - 1/2)(t - 1).$$